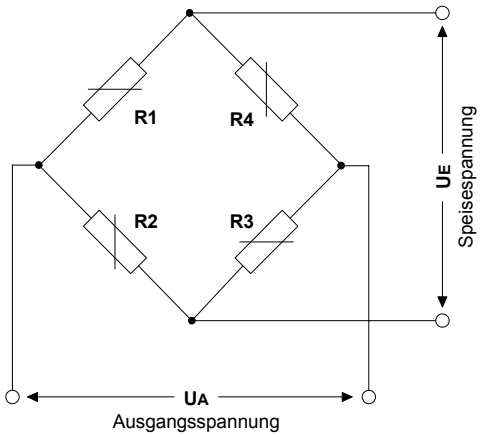
Drehmomentwellenberechnung

Jan 2009

Berechnung der Empfindlichkeit von Torsionsmessstellen

Die mit der Torsion einer Welle gesetzmäßig verbundenen Dehnungen auf der Wellenoberfläche lassen sich mit Dehnungsmessstreifen ermitteln. DMS werden vorzugsweise dort eingesetzt, wo das Zwischenschalten eines Drehmomentaufnehmers nicht möglich ist (zur Untersuchung bestehender Anlagen, Antriebswellen, Prüfstände, Schiffspropeller etc.).



Wheatstone'sche Brückenschaltung

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k \cdot \varepsilon$$

- Dehnung in benachbarten Brückenarmen subtrahieren sich voneinander bei gleichem Vorzeichen,
- sie addieren sich bei gegengesetztem Vorzeichen

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right) = \frac{k}{4}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4\right)$$

Bild 1: Wheatsone'sche Brückenschaltung

Die Messung von Drehmomenten erfolgt durch eine geschickte Kombination verschiedener Dehnungsmessungen auf der Oberfläche der durch das Drehmoment belasteten Welle. Nach einer kurzen Rechnung kann bei bekanntem Wellenmaterial direkt aus den Messwerten das belastende Moment ermittelt werden.

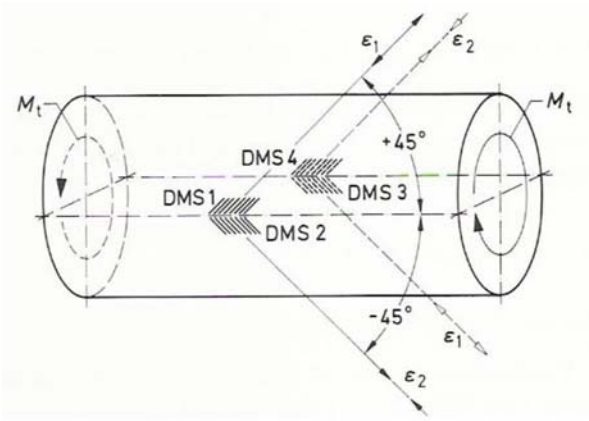


Bild 2: Messung von Torsion mit DMS

Beschränkungen für den Einsatz der DMS ergeben sich im Allgemeinen nur bei hohen Temperaturen an der Messstelle oder nicht ausreichenden Platzverhältnissen.

Zur Ermittlung der günstigsten Lage für die DMS-Messstellen geht man zurück in die Torsionstheorie. Die Betrachtung soll auf die Torsion von Wellen mit Kreisquerschnitt beschränkt bleiben.

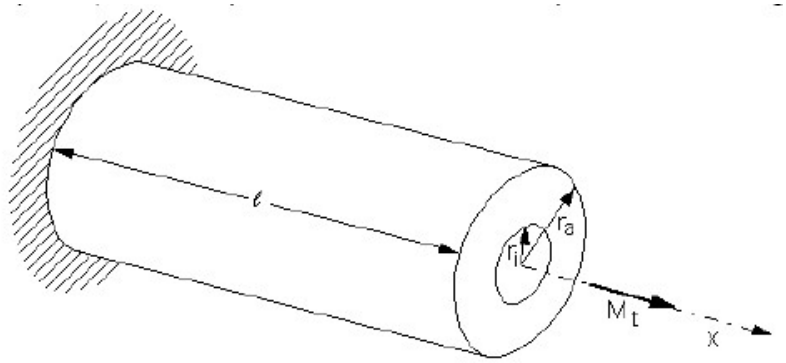


Bild3: Schematische Darstellung eines Stabes (Hohlwelle) mit angreifendem Drehmoment

Bei bekanntem Wellenmaterial und vorgegebenen geometrischen Abmessungen erhält man eine Gleichung zur Bestimmung des Torsionsmomentes

$$M_t = G \cdot I_P \cdot \frac{2\varepsilon}{r}$$

mit:
M_t: Torsionsmoment (Nm)
G: Schubmodul (N/m^2)
I_P: polares Flächenträgheitsmoment (m^4)

Der Schubmodul *G* ist eine Materialkonstante und steht in direktem Zusammenhang mit den Materialkonstanen *E* (Elastizitätsmodul) und μ (Poissonzahl)

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

mit:
E: Elastizitätsmodul 210 für Stahl (kN/mm^2)
μ: Poisson=0,28

Für einen kreisförmigen Querschnitt lässt sich das Integral des Flächenträgheitsmoment I_P Auflösen zu

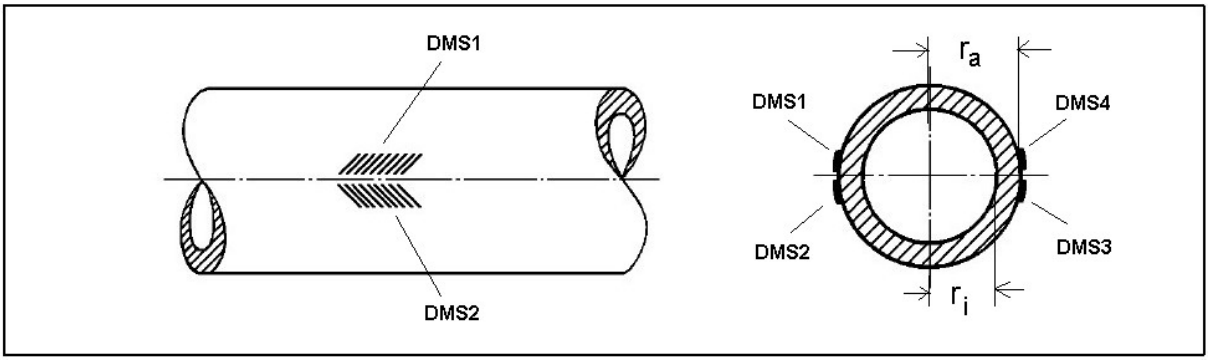
$$I_P = \frac{\pi}{2}\left(r_a^{\,4} - r_i^{\,4}\right)$$

Daraus ergibt sich die Dehnung (ε) der Welle zu

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{r_a}{r_a^{\,4} - r_i^{\,4}} \cdot \frac{M_t}{G}}$$

Beispiel:

*Berechnung von **Dehnung** (µm/m) und **DMS-Brückenempfindlichkeit** (mV/V) einer **Hohlwelle**:*



Vorgaben:
- Stahlwelle/Hohlzylinder mit E=210kN/mm^2
- Wellendurchmesser=30mm (r_a=15mm, r_i=10mm)
- DMS-Vollbrücke, k-Faktor=2
- einwirkendes Drehmoment: **1000Nm**

Berechnung der Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{r_a}{r_a^4 - r_i^4} \cdot \frac{M_t}{G} = \frac{1}{3{,}1415} \cdot \frac{15}{50626 - 10000} \cdot \frac{1000}{82{,}03125} = \underline{\underline{1432{,}8 \mu m / m}}$$

mit:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{210}{2{,}56} = 82{,}03125\,;$$

µ = 0,28

Berechnung der Empfindlichkeit der DMS-Vollbrücke:

$$S = U_A = \varepsilon \cdot k \cdot U_E = 1432{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 2865 \mu V / V = \underline{\underline{2{,}865 mV / V}}$$

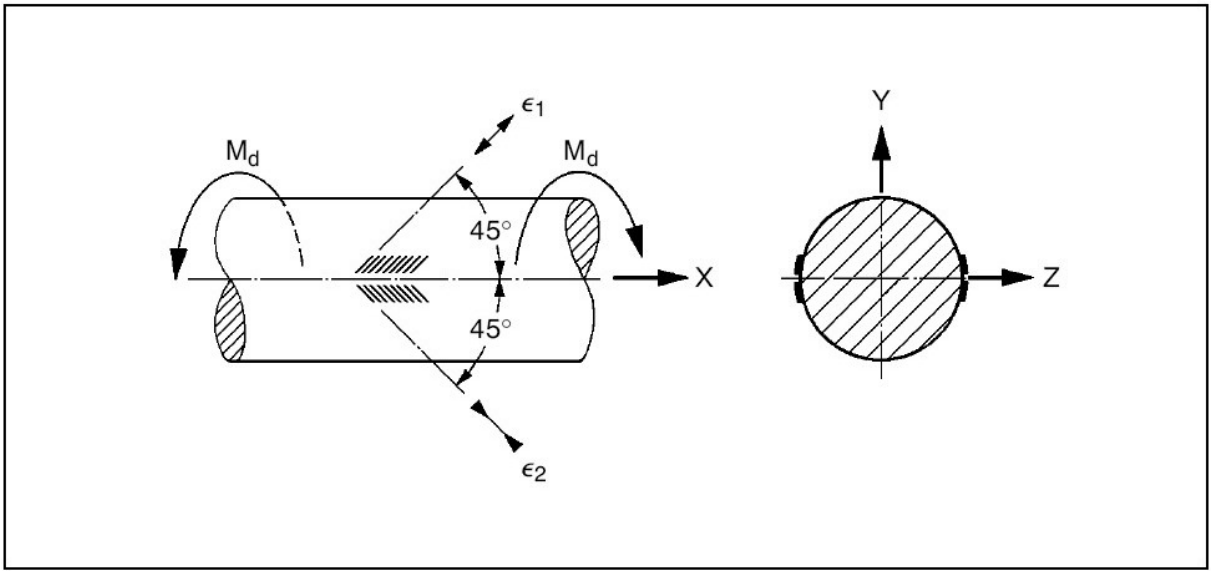
mit:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{4} \cdot k \cdot (\varepsilon 1 - \varepsilon 2 + \varepsilon 3 - \varepsilon 4) = k \cdot \varepsilon$$

U_E = 1V (Brückenspannung)

Beispiel:

*Berechnung von **Dehnung** (µm/m) und **DMS-Brückenempfindlichkeit** (mV/V) einer **Vollwelle**:*



Vorgaben:
- Stahlwelle/Kreiszylinder mit E=210kN/mm^2
- Wellendurchmesser=30mm (r_a=15mm, r_i=0mm)
- DMS-Vollbrücke, k-Faktor=2
- einwirkendes Drehmoment: **1000Nm**

Berechnung der Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{r_a^{\,3}} \cdot \frac{M_t}{G} = \frac{1}{3{,}1415} \cdot \frac{1}{3375} \cdot \frac{1000}{82{,}03125} = \underline{\underline{1149{,}7\,\mu m/m}}$$

mit:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} = \frac{210}{2{,}56} = 82{,}03125$$

µ = 0,28

Berechnung der Empfindlichkeit der DMS-Vollbrücke::

$$S = U_A = \varepsilon \cdot k \cdot U_E = 1149{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 2299\,\mu V/V = \underline{\underline{2{,}299\,mV/V}}$$

mit:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{4} \cdot k \cdot (\varepsilon 1 - \varepsilon 2 + \varepsilon 3 - \varepsilon 4) = k \cdot \varepsilon$$

U_E = 1V (Brückenspannung)

Vereinfachte Berechungen der Brücken-Empfindlichkeit:

Folgende vereinfachte Formeln gelten für Stahlwelle, Vollbrücke und k-Faktor 2,0

Berechnung der Empfindlichkeit bei Vollwelle:

$$S_{Stahl} = \frac{M_{t\max}}{d^3} \cdot 62{,}1$$

Berechnung der Empfindlichkeit bei Hohlwelle:

$$S_{Stahl} = \frac{M_{t\max} \cdot d_A}{(d_A{}^4 - d_I{}^4)} \cdot 62{,}1$$

mit:

S_{Stahl} = Empfindlichkeit in mV/V
M_{tmax} = maximales Torsionsmoment in Nm
d = Durchmesser der Welle
d_A = Außendurchmesser der Hohlwelle
d_I = Innendurchmesser der Hohlwelle
k = k-Faktor, Korrekturfaktor des DMS

Beispiel:

Berechnung der DMS-Empfindlichkeit, bei einer Stahlwelle mit d=30mm, E=210000N/mm² und einem Drehmoment von 1000Nm:

$$S_{Stahl} = \frac{M_{t\max}}{d^3} \cdot 62{,}1 = \frac{1000}{27000} \cdot 62{,}1 = \underline{\underline{2{,}3 mV/V}}$$

Berechnung des Drehmomentes einer Stahlwelle mit d=30mm, E-Modul=210000N/mm², bei einer Ausgangsspannung der applizierten DMS-Vollbrücke von 2,3mV/V:

$$M_{t\max} = S_{Stahl} \cdot \frac{d^3}{62{,}1} = 2{,}3 \cdot \frac{27000}{62{,}1} = \underline{\underline{1000 Nm}}$$

mit:

U_E = 1V (Brückenspannung)

Anlagen:

E-Modul von Werkstoffen

Metallische Werkstoffe bei 20 °C	
Material	E-Modul in kN/mm^2
Ferritischer Stahl	210
Austenitischer Stahl / martensitischer Stahl	195
Sphäroguss	170 bis 185
Grauguss	90 bis 155
Messing	78 bis 123
Kupfer	120
Titan	105
Aluminium	70
Magnesium	42
Blei	16
Invar	130 bis 150
Nickel	200
Wolfram	411

Zahlenwerte für Poissonzahl

Material	Querdehnzahl v
Kork	etwa 0,00
Beryllium	0,032
Bor	0,21
Schaumstoff	0,10 - 0,40
SiC	0,17
Beton	0,20
Sand	0,20 - 0,45
Eisen	0,21 - 0,259
Glas	0,18 - 0,3
Si_3N_4	0,25
Stahl	0,27 - 0,30
Lehm	0,30 - 0,45
Aluminium	0,33
Kupfer	0,33
Titan	0,34
Magnesium	0,35
Messing	0,37
PMMA (Plexiglas)	0,40 - 0,43
Blei	0,44
Gummi	0,50

Für metallische Werkstoffe wird häufig ein Wert von v = 0,3 oder v = 1 / 3 angenommen und für thermoplastische Kunststoffe 0,35 falls keine genaueren Werte bekannt sind. Ein Fehler in der Poissonzahl wirkt sich in der Berechnung des Bauteilverhaltens unter mechanischer Beanspruchung deutlich weniger aus als ein Fehler im E-Modul. Deshalb muss der E-Modul für das verwendete Material genau bestimmt werden (z. B. im Zugversuch), während für die Querkontraktion häufig ein ungefährer Wert genügt.