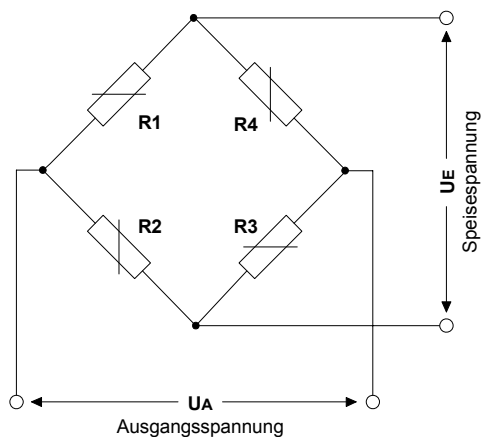


Drehmomentwellenberechnung

Jan 2009

1.) Berechnung der Empfindlichkeit von Torsionsmessstellen

Die mit der Torsion einer Welle gesetzmäßig verbundenen Dehnungen auf der Wellenoberfläche lassen sich mit Dehnungsmessstreifen ermitteln. DMS werden vorzugsweise dort eingesetzt, wo das Zwischenschalten eines Drehmomentaufnehmers nicht möglich ist (zur Untersuchung bestehender Anlagen, Antriebswellen, Prüfstände, Schiffspropeller etc.).



Wheatstone'sche Brückenschaltung

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k \cdot \varepsilon$$

- Dehnung in benachbarten Brückenarmen subtrahieren sich voneinander bei gleichem Vorzeichen,
- sie addieren sich bei gegengesetztem Vorzeichen

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) = \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$

Bild 1: Wheatstone'sche Brückenschaltung

Die Messung von Drehmomenten erfolgt durch eine geschickte Kombination verschiedener Dehnungsmessungen auf der Oberfläche der durch das Drehmoment belasteten Welle. Nach einer kurzen Rechnung kann bei bekanntem Wellenmaterial direkt aus den Messwerten das belastende Moment ermittelt werden.

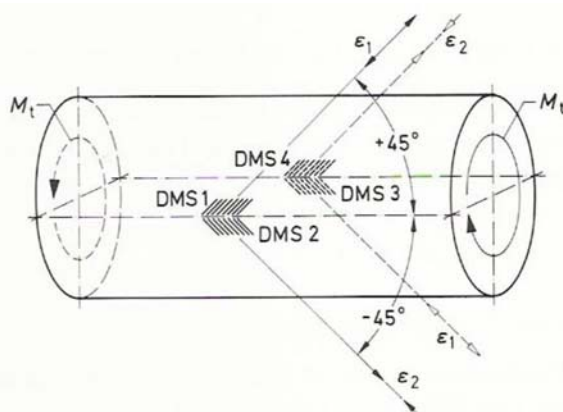


Bild 2: Messung von Torsion mit DMS

Beschränkungen für den Einsatz der DMS ergeben sich im Allgemeinen nur bei hohen Temperaturen an der Messstelle oder nicht ausreichenden Platzverhältnissen.

Zur Ermittlung der günstigsten Lage für die DMS-Messstellen geht man zurück in die Torsionstheorie. Die Betrachtung soll auf die Torsion von Wellen mit Kreisquerschnitt beschränkt bleiben.

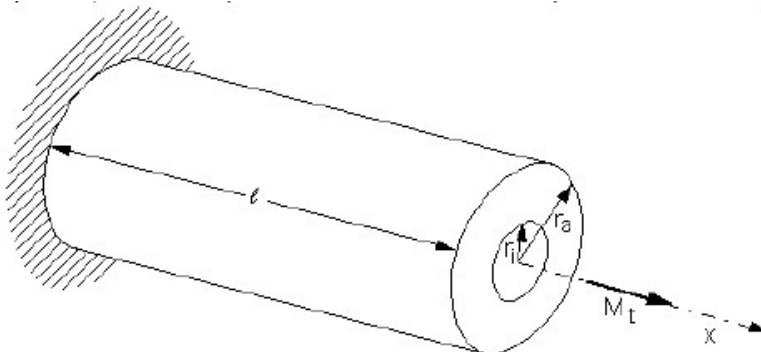


Bild3: Schematische Darstellung eines Stabes (Hohlwelle) mit angreifendem Drehmoment

Bei bekanntem Wellenmaterial und vorgegebenen geometrischen Abmessungen erhält man eine Gleichung zur Bestimmung des Torsionsmomentes

$$M_t = G \cdot I_p \cdot \frac{2\varepsilon}{r}$$

mit:

M_t : Torsionsmoment (Nm)

G : Schubmodul (N/m²)

I_p : polares Flächenträgheitsmoment (m⁴)

Der Schubmodul G ist eine Materialkonstante und steht in direktem Zusammenhang mit den Materialkonstanten E (Elastizitätsmodul) und μ (Poissonzahl)

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

mit:

E : Elastizitätsmodul 210 für Stahl (kN/mm²)

μ : Poisson=0,28

Für einen kreisförmigen Querschnitt lässt sich das Integral des Flächenträgheitsmoment I_p auflösen zu

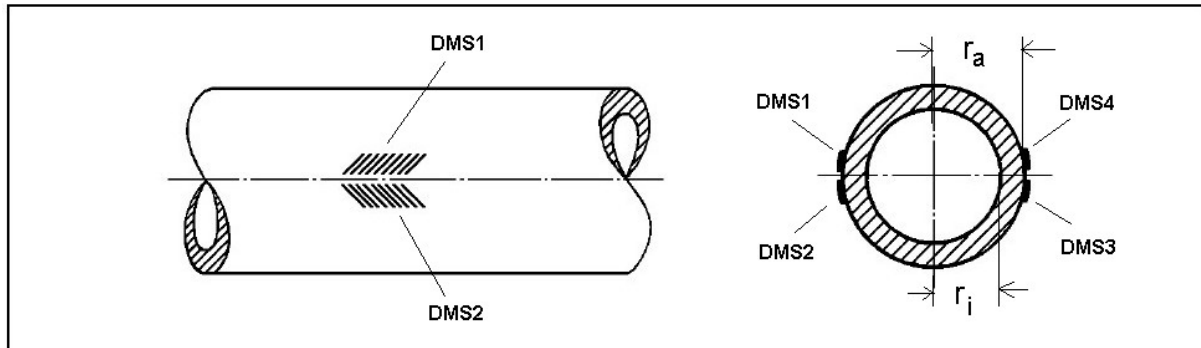
$$I_p = \frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4)$$

Daraus ergibt sich die Dehnung (ε) der Welle zu

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{r_a}{r_a^4 - r_i^4} \cdot \frac{M_t}{G}$$

Beispiel:

Berechnung von **Dehnung** ($\mu\text{m/m}$) und **DMS-Brückenempfindlichkeit** (mV/V) einer **Hohlwelle**:



Vorgaben:

- Stahlwelle/Hohlzylinder mit $E=210\text{kN/mm}^2$
- Wellendurchmesser: 30mm ($r_a=15\text{mm}$, $r_i=10\text{mm}$)
- DMS-Vollbrücke, k-Faktor=2
- einwirkendes Drehmoment: **1000Nm**

Berechnung der Dehnung:

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{r_a}{r_a^4 - r_i^4} \cdot \frac{M_t}{G} = \frac{1}{3,1415} \cdot \frac{15}{50626 - 10000} \cdot \frac{1000}{82,03125} = \underline{\underline{1432,8 \mu\text{m/m}}}$$

mit:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{210}{2,56} = 82,03125 ;$$

$$\mu = 0,28$$

Berechnung der Empfindlichkeit der DMS-Vollbrücke:

$$\rightarrow S = U_A = \varepsilon \cdot k \cdot U_E = 1432,8 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 2865 \mu\text{V/V} = \underline{\underline{2,865 \text{mV/V}}}$$

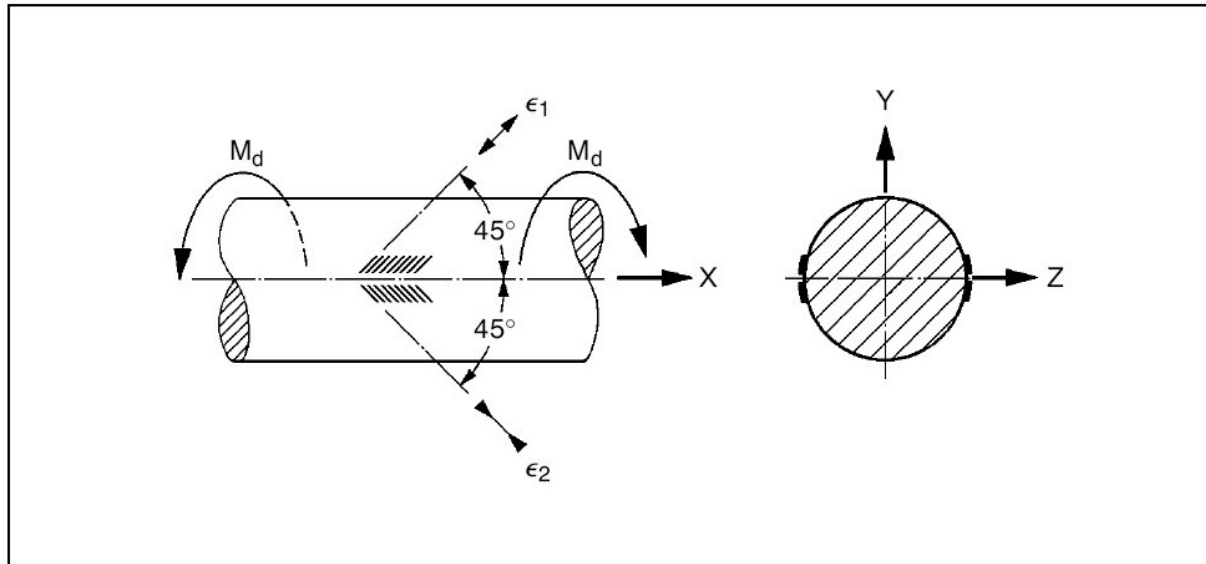
mit:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{4} \cdot k \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = k \cdot \varepsilon ;$$

$$U_E = 1\text{V (Brückenspannung)}$$

Beispiel:

Berechnung von **Dehnung** ($\mu\text{m/m}$) und **DMS-Brückenempfindlichkeit** (mV/V) einer **Vollwelle**:



Vorgaben:

- Stahlwelle/Kreiszyylinder mit $E=210\text{kN/mm}^2$
- Wellendurchmesser: 30mm ($r_a=15\text{mm}$, $r_i=0\text{mm}$)
- DMS-Vollbrücke, k-Faktor=2
- einwirkendes Drehmoment: **1000Nm**

Berechnung der Dehnung:

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{r_a^3} \cdot \frac{M_t}{G} = \frac{1}{3,1415} \cdot \frac{1}{3375} \cdot \frac{1000}{82,03125} = \underline{\underline{1149,7 \mu\text{m/m}}}$$

mit:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{210}{2,56} = 82,03125$$

$$\mu = 0,28$$

Berechnung der Empfindlichkeit der DMS-Vollbrücke::

$$\rightarrow S = U_A = \varepsilon \cdot k \cdot U_E = 1149,7 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 2299 \mu\text{V/V} = \underline{\underline{2,299\text{mV/V}}}$$

mit:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{4} \cdot k \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = k \cdot \varepsilon;$$

$$U_E = 1\text{V (Brückenspannung)}$$

2.) Vereinfachte Berechnungen der Brücken-Empfindlichkeit

Folgende vereinfachte Formeln gelten für Stahlwelle, Vollbrücke und k-Faktor 2,0

Berechnung der Empfindlichkeit bei Vollwelle:

$$S_{\text{Stahl}} = \frac{M_{t \max}}{d^3} \cdot 62,1$$

Berechnung der Empfindlichkeit bei Hohlwelle:

$$S_{\text{Stahl}} = \frac{M_{t \max} \cdot d_A}{(d_A^4 - d_I^4)} \cdot 62,1$$

mit:

- S_{Stahl} = Empfindlichkeit in mV/V
- $M_{t \max}$ = maximales Torsionsmoment in Nm
- d = Durchmesser der Welle
- d_A = Außendurchmesser der Hohlwelle
- d_I = Innendurchmesser der Hohlwelle
- k = k-Faktor, Korrekturfaktor des DMS

Beispiel:

Berechnung der DMS-Empfindlichkeit, bei einer Stahlwelle mit $d=30\text{mm}$, $E=210000\text{N/mm}^2$ und einem Drehmoment von 1000Nm :

$$\rightarrow S_{\text{Stahl}} = \frac{M_{t \max}}{d^3} \cdot 62,1 = \frac{1000}{27000} \cdot 62,1 = \underline{\underline{2,3\text{mV} / \text{V}}}$$

Berechnung des Drehmomentes einer Stahlwelle mit $d=30\text{mm}$, $E\text{-Modul}=210000\text{N/mm}^2$, bei einer Ausgangsspannung der applizierten DMS-Vollbrücke von $2,3\text{mV/V}$:

$$\rightarrow M_{t \max} = S_{\text{Stahl}} \cdot \frac{d^3}{62,1} = 2,3 \cdot \frac{27000}{62,1} = \underline{\underline{1000\text{Nm}}}$$

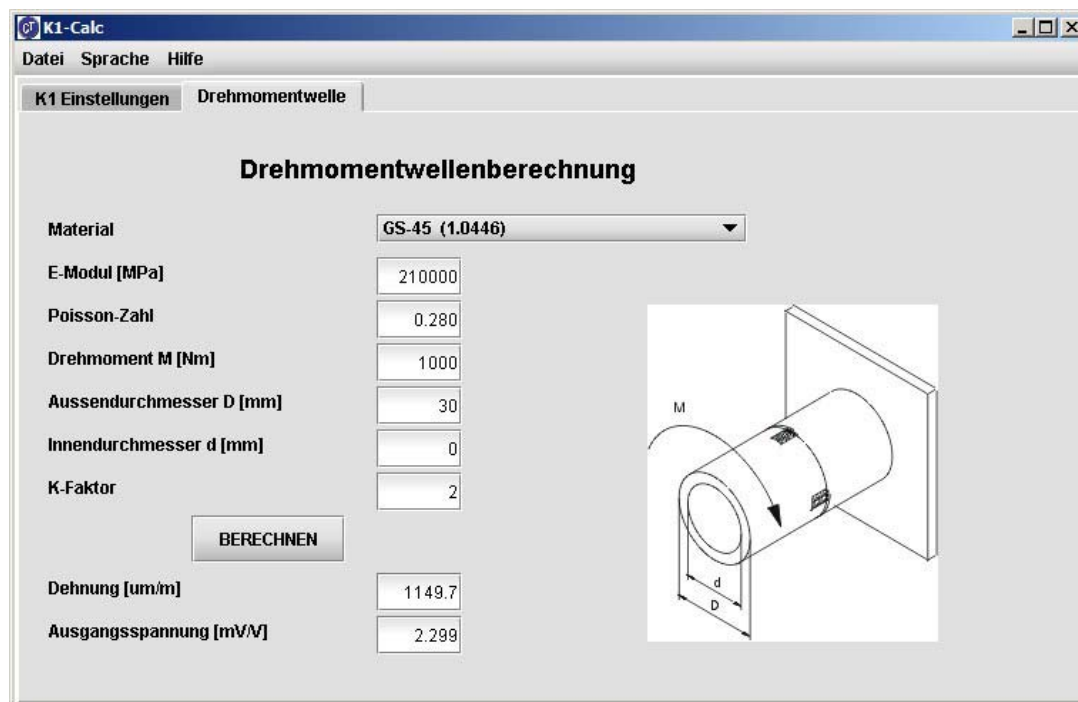
mit:

$U_E = 1\text{V}$ (Brückenspannung)

3.) Drehmomentwellenberechnung mit Hilfe von Kalkulationssoftware

Mit Hilfe einer kleinen Kalkulationssoftware können die Torsion der Welle und die Empfindlichkeit der Messbrücke bei vorgegebenem Drehmoment berechnet werden. Das Wellenmaterial wird aus einer Liste gewählt und die vorgegebenen Konstanten für „E-Modul“ und „Poissonzahl“ genutzt oder es werden Werte in die Felder manuell eingetragen. Anschließend wird das maximal zu erwartende Drehmoment (Nm), der Außen- und Innendurchmesser (mm) der Welle sowie der k-Faktor der Messbrücke eingegeben. Nach einem Klick auf „Berechnen“ werden Dehnung und Ausgangsspannung als Ergebnisse angezeigt.

- Material der Welle auswählen: Edelstahl GS-45 (E=210000)
- Wellendurchmesser eingeben: 30 mm
- K-Faktor der Messbrücke wählen: 2 (Vollbrücke)
- max. zu erwartendes Drehmoment eintragen: 1000 Nm
- „Berechnen“ anklicken



The screenshot shows the 'K1-Calc' software window with the 'Drehmomentwelle' tab selected. The title is 'Drehmomentwellenberechnung'. The interface includes a menu bar (Datei, Sprache, Hilfe) and a toolbar (K1 Einstellungen, Drehmomentwelle). The main area contains input fields for Material (GS-45 (1.0446)), E-Modul [MPa] (210000), Poisson-Zahl (0.280), Drehmoment M [Nm] (1000), Aussendurchmesser D [mm] (30), Innendurchmesser d [mm] (0), and K-Faktor (2). A 'BERECHNEN' button is located below the input fields. The results section shows 'Dehnung [um/m]' (1149.7) and 'Ausgangsspannung [mV/V]' (2.299). To the right of the input fields is a technical diagram of a shaft with a torque M applied, showing the outer diameter D and inner diameter d.

Ergebnisse:

- - Dehnung: $\varepsilon = 1149,7\mu\text{m/m}$
- - Brückenausgangsspannung: $S = 2.299\text{mV/V}$

Bei einem Drehmoment von 1000Nm entsteht eine Dehnung von 1149,7 $\mu\text{m/m}$ und eine Differenzspannung am Ausgang der DMS-Vollbrücke von 2,299mV/V.

Hinweis: Die ermittelte Brücken-Empfindlichkeit sollte als Kennwert auf der Welle notiert werden.

Anlagen:

E-Modul von Werkstoffen

| Metallische Werkstoffe bei 20 °C | |
|--|-------------------------------|
| Material | E-Modul in kN/mm ² |
| Ferritischer Stahl | 210 |
| Austenitischer Stahl / martensitischer Stahl | 195 |
| Sphäroguss | 170 bis 185 |
| Grauguss | 90 bis 155 |
| Messing | 78 bis 123 |
| Kupfer | 120 |
| Titan | 105 |
| Aluminium | 70 |
| Magnesium | 42 |
| Blei | 16 |
| Invar | 130 bis 150 |
| Nickel | 200 |
| Wolfram | 411 |

Zahlenwerte für Poissonzahl

| Material | Querdehnzahl ν |
|--------------------------------|--------------------|
| Kork | etwa 0,00 |
| Beryllium | 0,032 |
| Bor | 0,21 |
| Schaumstoff | 0,10 - 0,40 |
| SiC | 0,17 |
| Beton | 0,20 |
| Sand | 0,20 - 0,45 |
| Eisen | 0,21 - 0,259 |
| Glas | 0,18 - 0,3 |
| Si ₃ N ₄ | 0,25 |
| Stahl | 0,27 - 0,30 |
| Lehm | 0,30 - 0,45 |
| Aluminium | 0,33 |
| Kupfer | 0,33 |
| Titan | 0,34 |
| Magnesium | 0,35 |
| Messing | 0,37 |
| PMMA (Plexiglas) | 0,40 - 0,43 |
| Blei | 0,44 |
| Gummi | 0,50 |

Für metallische Werkstoffe wird häufig ein Wert von $\nu = 0,3$ oder $\nu = 1 / 3$ angenommen und für thermoplastische Kunststoffe 0,35 falls keine genaueren Werte bekannt sind. Ein Fehler in der Poissonzahl wirkt sich in der Berechnung des Bauteilverhaltens unter mechanischer Beanspruchung deutlich weniger aus als ein Fehler im E-Modul. Deshalb muss der E-Modul für das verwendete Material genau bestimmt werden (z. B. im Zugversuch), während für die Querkontraktion häufig ein ungefährer Wert genügt.